Mouvement dans un champ de force central conservatif

Données : $\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$; $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}\ kg$

Exercice n°1 (★)

Lors de son lancement, le satellite d'observation Hypparcos est resté sur son orbite de transfert à cause d'un problème technique. On l'assimile à un point matériel M de masse $m = 1100\ kg$. L'orbite de transfert est elliptique et la distance Terre-satellite varie entre $d_P = 200\ km$ au périgée et $d_A = 35{,}9.10^3\ km$ à l'apogée. On mesure la vitesse du satellite à son apogée : $v_A = 350\ m.s^{-1}$.

1. Faire un schéma de la trajectoire en faisant apparaître la position O du centre de la Terre, l'apogée A et le périgée P.
2. Déterminer le demi-grand axe a de la trajectoire.
3. En déduire l'énergie mécanique et la période du satellite.
4. On note v_A et v_P les vitesses du satellite à son apogée et son périgée. Exprimer le moment cinétique calculé au point O du satellite en A puis en P.
5. En déduire la vitesse du satellite à son périgée.

Exercice n°2 (★★)

On étudie le mouvement d'un satellite artificiel de la Terre dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. On néglige les autres interactions que la force de gravitation entre la Terre et le satellite. On note M_T la masse de la Terre, R_T son rayon, m la masse du satellite supposée petite devant M_T et $\mathcal{G}$ la constante gravitationnelle. On note T_0 la période de révolution du satellite.

1. Établir la conservation du moment cinétique du satellite par rapport à la Terre.
2. En déduire que le mouvement du satellite est plan.
3. Montrer que cela permet de définir une constante des aires $\mathcal{C}$ dont on donnera l'expression.
4. On suppose que le satellite est en orbite circulaire autour de la Terre. Montrer que son mouvement est uniforme.
5. Établir l'expression de la vitesse v du satellite en fonction de $\mathcal{G}$, M_T et r, rayon de l'orbite du satellite.
6. Retrouver la troisième loi de Kepler dans le cas d'une trajectoire circulaire. Faire l'application numérique pour un satellite situé sur une orbite basse à $10^3\ km$ d'altitude.
7. Déterminer l'énergie cinétique E_c du satellite en fonction de $\mathcal{G}$, M_T, m et r.
8. Même question pour l'énergie potentielle E_p du satellite. Donner la relation entre E_c et E_p.
9. En déduire l'expression de l'énergie mécanique E_m et les relations de E_m avec E_c et E_p.

Les satellites en orbite basse subissent des frottements de la part des hautes couches de l'atmosphère terrestre. Ces frottements limitent la durée de vie des satellites en les faisant *lentement chuter sur la Terre. Un satellite situé sur une orbite à* $10^3\ km$ *d'altitude descend d'environ* $2\ m$ *par jour. On cherche à modéliser ces observations.*

On modélise l'action des hautes couches de l'atmosphère par une force de frottement proportionnelle à la masse du satellite et sa vitesse au carré :

$$\vec{f} = -m\alpha v \vec{v}$$

où α est un coefficient de frottement. Cette force est suffisamment faible pour que la trajectoire soit quasi-circulaire. Dans ces conditions, les expressions des énergies en fonction de r restent valables mais r varie lentement dans le temps.

10. À l'aide du théorème de la puissance mécanique, établir l'équation vérifiée par r.
11. Sans résoudre, montrer que r ne peut que diminuer.
12. En déduire un résultat surprenant sur l'évolution de la vitesse du satellite.

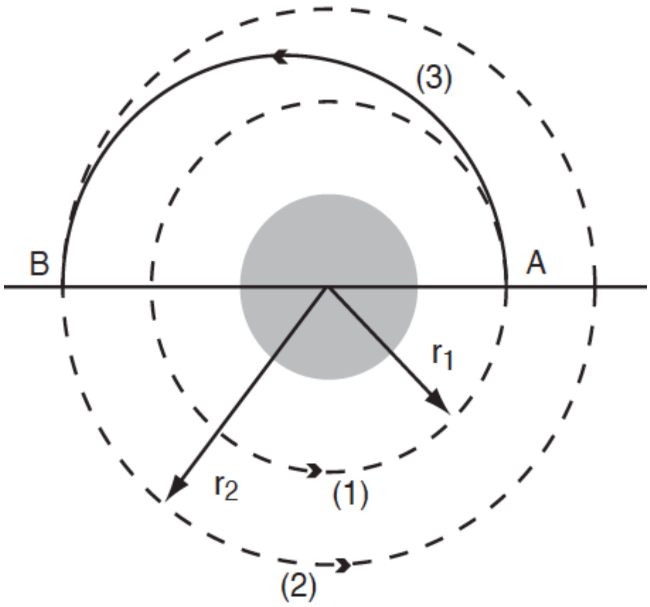
Exercice n°3 (★★)

On veut transférer un satellite S de masse m initialement sur une orbite circulaire basse de rayon r_1 (autour de la Terre de masse M_T) à une orbite circulaire haute de rayon r_2.

$$r_1 = 6400 + 500\ km$$

$$r_2 = 6400 + 36000\ km$$

Pour cela, on utilise une ellipse de transfert (de A à B) dite ellipse de Hohmann dont la Terre est un foyer.



1. Exprimer et calculer la vitesse v_1 du satellite sur l'orbite basse.
2. Exprimer l'énergie mécanique du satellite E_1 sur sa trajectoire basse.
3. Exprimer l'énergie mécanique du satellite E_3 sur l'ellipse de transfert.
4. Que faut-il apporter au satellite au point A pour qu'il passe sur l'ellipse de Hohmann ? Exprimer et calculer l'écart de vitesse Δv_A nécessaire.
5. Quelle action faut-il avoir sur le satellite en B pour qu'il passe sur l'orbite circulaire haute ? Exprimer et calculer l'écart de vitesse Δv_B nécessaire.
6. Exprimer et calculer la durée de transfert (entre A et B).

Exercice n°4 (★ ★)

1. Montrer que si la trajectoire d'un point soumis à une force centrale est un cercle, le mouvement de ce point est alors uniforme.
2. Un point matériel M, de masse m, est soumis à une force centrale du type :

$$\vec{F} = \frac{Km}{r^4}\vec{r}$$

A l'instant initial, le point M se trouve en A de coordonnées $r_0 = a$ et $\theta_0 = 0$, la vitesse étant perpendiculaire à $\overrightarrow{OA}$ avec une constante des aires $\mathscr{C}$ positive. Etablir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par r en faisant intervenir $\mathscr{C}$ et K.

Exercice n°5 (★ ★ ★)

Un palet M de masse m, accroché à l'extrémité d'un ressort de longueur à vide l_0, de raideur k et dont l'autre extrémité est fixée en O, peut se mouvoir sans frottement dans le plan horizontal (xOy) (table à coussin d'air par exemple). On considère deux situations initiales :

a) à $t = 0$, le ressort est maintenu dans la direction (Ox), la masse écartée d'une longueur $l_1 = 1{,}2l_0$ puis lâchée sans vitesse initiale.

b) à $t = 0$, $\overrightarrow{OM}_0 = l_2\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{v_0} = l_2\omega_0\overrightarrow{e_y}$

1. Montrer que le moment cinétique par rapport à O est constant et donner sa valeur dans chacun des cas. En déduire la nature du mouvement a) et établir son équation horaire.
2. L'énergie mécanique est-elle constante ? L'exprimer en introduisant l'énergie potentielle effective $E_{p_{eff}}(r)$. Tracer $E_{p_{eff}}(r)$ et en déduire les positions possibles du mobile selon les conditions initiales.
3. Discuter la possibilité d'un mouvement circulaire.

Exercice n°6 (★ ★ ★)

On veut qu'un satellite S décrive une orbite circulaire de rayon r_0 autour du centre T de la Terre (de masse M_T).

1. Calculer la vitesse v_0 du satellite ainsi que son énergie mécanique. Indiquer la direction de la vitesse $\overrightarrow{v_0}$.
2. Une erreur a été commise lors de la satellisation. Le satellite a bien été lancé sur un rayon r_0 avec une vitesse v_0 mais la direction réelle de lancement fait un angle α avec la direction de la question 1 (vers l'extérieur : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)
   a. Déterminer la nature de la trajectoire réelle du satellite.
   b. Construire l'allure de la trajectoire.
   c. Exprimer r_P et r_A les rayons aux périgée et apogée ainsi que les vitesses v_P et v_A en ces points.